Közgazdasági Szemle, LVII. évf., 2010. július–augusztus (634–651. o.)

SZÜLE BORBÁLA

Biztosítók kockázatdiverzifikációja

A biztosítók működését általában több homogén részállományból összetevődő heterogén biztosítási állomány jellemzi. A részállományok alkotta *biztosítási portfólió* esetében a kockázatdiverzifikáció vizsgálható a teljes állományra, illetve a részállományokra összesített kockázatok különbségeként, és elemezhető a kockázat és hozam kapcsolata alapján is. A biztosítók működésének főbb sajátosságait tartalmazó modellben azt mutatjuk meg, hogy a biztosítási portfólió esetében tapasztalható kockázatdiverzifikációs hatások milyen mértékben hasonlítanak a klasszikusnak számító, befektetésekkel foglalkozó Markowitz-féle portfólióelmélet által leírtakra. Modellünk alapján megállapítható: számos hasonlóságon túl a biztosító működési sajátosságai következtében a hatékony biztosítási portfóliók, illetve az optimális befektetési arányok meghatározása egyedi tulajdonságokkal jellemezhető.
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11, G22.

A biztosítók működésében nagy szerepe van egyes valószínűségszámítási alapelveknek. Ilyen például a nagy számok törvénye, amely a biztosítók működésével kapcsolatban úgy is megfogalmazható, hogy ha a biztosító nagyobb méretű homogén (egyforma tulajdonságokkal jellemezhető) biztosítási állománnyal rendelkezik, akkor a ténylegesen teljesítendő biztosítási szolgáltatások értéke jobban közelíti a várható értéket. A diverzifikáció fogalma általában valamilyen portfólió különböző elemei közötti megosztásával kapcsolatos. A (homogén) biztosítási állomány méretnövekedése esetében általános értelemben is megállapítható a diverzifikáció kockázatcsökkentő hatása. A biztosítók állománya azonban többnyire nem homogén, hanem különböző homogén részállományokból tevődik össze. A kockázatdiverzifikáció témáját érdemes lehet a biztosító esetében e homogén részállományok esetében is elemezni, vagyis azzal foglalkozni, hogy a biztosítók állományának heterogenitása hogyan függ össze a kockázattal.

A diverzifikáció hagyományos megközelítése gyakran szerepel a pénzügyi szakirodalomban is: a „klasszikus” Markowitz-féle portfólióelméletben a portfólióelemek különböző befektetési lehetőségek, amelyek esetében a diverzifikáció kockázatcsökkentő hatása a hozamok közötti korreláció mértékétől függ (*Markowitz* [1959/1991]). Hatékony befektetési lehetőségek felderítéséhez is érdemes továbbgondolni a Markowitz-féle portfólióelméletet, és ennek mintájára elemezni a biztosítók működésében érvényesülő – a biztosítási állományt különböző (homogén) részállományok alkotta *biztosítási portfóliónak* tekintve – kockázatdiverzifikációs hatásokat.

A biztosítási részállományok esetében az elemzést nehezíti, hogy – eltérően a Markowitz-féle elméletben szereplő befektetési lehetőségektől – a piaci értékek nem mérhetők rendsze-

Szüle Borbála a Budapesti Corvinus Egyetem oktatója (e-mail: borbala.szule@uni-corvinus.hu).

resen rövid időközönként, így a piaci hozamok sem számolhatók. A biztosítási kötelezettségek esetében nincs rendszeres (akár tőzsdei szintű) piaci kereskedés sem, a biztosítási részállományok átruházása nem tekinthető mindennapos esetnek. A biztosítási kötelezettségek piaci értékének kiszámítása a gyakorlatban lehetséges, azonban meglehetősen összetett feladat.

E tények ismeretében azonban még érdekesebbnek tűnik a kérdés, hogy a biztosítási részállományok esetében a kockázat szempontjából milyen kombináció (milyen *biztosítási portfólió*) tekinthető ideálisnak, illetve milyen módon érdemes diverzifikálni, ha a diverzifikáció lehetséges kockázatmódosító hatásait is figyelembe vesszük. E tanulmányban e kérdés megválaszolására törekszünk egy olyan modellkeretben, amely a biztosító működését leginkább jellemző tényezőket, illetve paramétereket veszi figyelembe. A Markowitz-féle portfólióelméleti kerethez hasonló modellben a tanulmány két biztosítási részállomány kapcsolatát elemzi, azt feltételezve, hogy a két részállomány esetében a veszteség-jelenértékek együttes eloszlása normális eloszlás, így a lineáris korrelációs együttható megfelelő mutatószámnak tekinthető a két részállomány eredményessége közötti kapcsolat mérésére (a lineáris korrelációs együttható alkalmazásával az eredmények jobban összehasonlíthatók a Markowitz-féle modell eredményeivel). A Markowitz-féle portfólióelmélethez képest a tanulmányban szereplő modellben eltérés, hogy a kockázat mérésére a tanulmány a biztosítási részállományok esetében a veszteség-jelenérték mint valószínűségi változó alapján számolható kockáztatott értéket *(Value at Risk, VaR),* illetve szélen mért kockáztatott értéket *(Tail Value at Risk, TailVaR)* alkalmazza. Ennek oka elsősorban, hogy a napi piaci értékelés hiányában a Markowitz-féle elmélethez hasonló hozamszórás számolása értelmetlen lenne, másfelől pedig a VaR, illetve a TailVaR a biztosítók kockázata esetében szakmai berkekben általánosan elfogadottnak tekintett, releváns mutatószám (értékük tőkeszükségletként is értelmezhető).

A következőkben a tanulmányban először áttekintjük a biztosító működésének leírására alkalmazott elméleti modellt, illetve a kockázati mutatószám választásával kapcsolatos megfontolásokat elemezzük. Ezt követően a diverzifikációval elérhető minimális és maximális kockázatcsökkenés mértékével, majd pedig a Markowitz-féle portfólióelmélet definíciójához hasonló értelemben „hatékonynak” tekinthető biztosítási portfóliók meghatározásával, valamint a kockázatminimalizáló, illetve a kockázatarányos hozam maximalizálását lehetővé tevő portfóliók összehasonlításával foglalkozunk.

A kockázatcsökkenés korlátai

A biztosítók tevékenysége a gyakorlatban meglehetősen összetett. A „klasszikus” biztosítási tevékenység esetében a működés egyik alapelvének tekinthető a különböző biztosítási kockázatok vállalása biztosítási díjbevétel ellenében, díjtartalékok képzése a díjbevétel alapján, valamint különböző (például pénzügyi) eszközökbe történő befektetés a későbbi biztosítási kötelezettségekhez igazodó struktúrával. A tanulmányban alkalmazott modell ennek megfelelően épül fel. E modellben a biztosító biztosítási szerződések alapján biztosítási kockázatot vállal, illetve pénzügyi eszközökbe fekteti az ügyfelek által befizetett díjak alapján számított díjtartalékot és a rendelkezésre álló saját forrásait (tőkét). A Markowitz-féle portfólióelmélethez hasonlóan a biztosító modellje is egyéves időtávot tekintve méri az eredményességet, illetve a kockázatot.[1] Ezért a modellben azt tesszük fel,

[1] A nemrégiben elfogadott Szolvencia II. szabályozás szerint a biztosítóknak legalább annyi saját tőkét kell tartaniuk, hogy az – a vállalkozás folytatásának elvét figyelembe véve – egyéves időtartamot tekintve fedezze a nem várt veszteségeket (*Európai Parlament és a Tanács*… [2009]).

hogy a biztosítási kötelezettségek az egyéves időtáv végén esedékesek.[2] A biztosító mérlegének egyszerűsített sémájában tehát a kezdő időpontban, illetve az egy évvel későbbi értékek esetében is teljesül a következő összefüggés:

$$E = ST + K, \tag{1}$$

ahol E az összes eszköz, ST a saját tőke értéke, K a kötelezettségek értéke.

A modell nem foglalkozik más (a gyakorlatban lehetséges) mérlegtételekkel, például ingatlanokkal, időbeli elhatárolásokkal.

A feltevések szerint a biztosító állománya homogén részállományokból tevődik össze. Ez azt jelenti, hogy a homogén részállományok esetében a biztosítási szerződések fontosabb tulajdonságai – a biztosítási esemény valószínűsége és az esemény bekövetkezésekor a fizetendő biztosítási összeg, valamint adott részállományon belül a számítások során alkalmazott technikai kamat is – megegyeznek. A feltevések alapján a biztosító ügyfelei egyszeri díjat fizetnek, a költségek azonnal esedékesek (ezeket a befolyó díjból kifizetik), és a biztosító díjtartaléka az egyszeri nettó díjak összegével egyezik meg. Az egyszeri nettó díj egy adott biztosítási szerződés esetén a kötelezettségek várható jelenértékeként számítható ki a következőképpen:

$$\frac{Bp}{1+i}, \tag{2}$$

ahol B a biztosítási összeg (amit biztosítási esemény bekövetkezése esetén a biztosítási szerződés alapján ki kell fizetni a szerződésben szereplő személy számára;
p: a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége;
i: a technikai kamat.

A díjszámítás effajta meghatározása inkább az életbiztosítási szemlélethez áll közel (ugyanakkor az életbiztosításoktól eltérő esetekben is hasonló elven alapulnak a díjszámítás kezdeti lépései) – azzal együtt, hogy természetesen az életbiztosítás esetében is a gyakorlatban jóval bonyolultabb a biztosítási díj meghatározása.

Egy adott biztosítási szerződés esetében a modellfeltevések szerint a biztosítási esemény bekövetkezése p valószínűségű, így az i-edik biztosítási szerződés esetében a következőképpen definiálható ξ_i (karakterisztikus) valószínűségi változó:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \text{ ha bekövetkezik a biztosítási esemény.} \\ 0, \text{ nem következik be a biztosítási esemény} \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A biztosító (homogén) részállományában bekövetkező összes biztosítási esemény száma (binomiális eloszlású ξ valószínűségi változó) a ξ_i (karakterisztikus) valószínűségi változók összegeként írható fel:

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n. \tag{3}$$

A binomiális eloszlást jellemző két fontos érték a várható érték és a variancia. A ξ valószínűségi változó eloszlása esetében a várható érték $\mathrm{E}(\xi) = np$, a variancia pedig $\mathrm{Var}(\xi) = np(1 - p)$.

Megfelelően nagy n esetén (ez már $n = 1000$ esetében is teljesülhet) a binomiális eloszlás a normális eloszlással közelíthető. Mivel a gyakorlatban a homogén biztosítási részál-

[2] Ennél hosszabb időszakra vonatkozó biztosítási kötelezettségek esetében az egyéves időtartam végén a későbbi időszakokra vonatkozó kötelezettségek értékének becslése lenne szükséges, ami nagymértékben bonyolítaná a képleteket. A modell lényeges eredményei a biztosítási kötelezettségek egyéves lejáratának feltevése esetén is megmutatkoznak.

lományokban a biztosítási szerződések száma gyakran több mint 1000, így a biztosítási események számát mutató ξ valószínűségi változót a továbbiakban normális eloszlással közelítjük. Ebből az is következik, hogy a modellben a biztosító (egy évvel későbbi) veszteségének jelenértéke szintén normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. A gyakorlatban természetesen a veszteség-jelenértékek eltérhetnek a normális eloszlástól: az életbiztosítások esetében például a különböző maradékjogok (például a visszavásárlás) vagy például a többlethozam-visszatérítések figyelembevétele, a nem életbiztosítások esetében pedig például az egyes biztosítási szerződések közötti összefüggések[3] is hozzájárulhatnak a nem normális eloszlású veszteség-jelenérték kialakulásához, valamint természetesen ilyen irányba hat a katasztrófakockázat figyelembevétele is. A modellben egy adott homogén biztosítási részállomány esetében normális eloszlásúnak tekintett veszteség-jelenérték (η valószínűségi változó) a modellfeltevések alapján a következő:

$$\eta = \frac{B\xi}{1+k} - \frac{Bnp(1+s)(1+r)}{(1+i)(1+k)}, \tag{4}$$

ahol n a biztosítási szerződések száma (vagyis a biztosító homogén részállományának nagysága);
s: a homogén részállományhoz rendelhető saját tőke és a részállomány kezdeti díjtartalékának hányadosa (a modellben a különböző részállományok s értékeit azonosnak tekintjük);
r: befektetési hozam (ezt az értéket konstansnak tekintjük);
k: a veszteség-jelenérték számításához használt diszkontráta.

A továbbiakban a számítások során két biztosítási részállománnyal foglalkozunk, e kételemű biztosítási portfólió esetében elemezzük a kockázatdiverzifikációs hatásokat.[4] A biztosítási részállományok esetében a feltevések szerint az állomány mérete, a biztosítási esemény bekövetkezési valószínűsége, illetve a technikai kamat értéke különbözhet, ezek az értékek egyedileg az adott részállományokra vonatkoznak.[5] A további paraméterek (biztosítási összeg, befektetési hozam, a veszteség-jelenérték diszkontálásához alkalmazott ráta, illetve az s) értékeit a két részállomány esetében azonosnak tekintjük. E feltevések alkalmazásával a két biztosítási részállomány esetében a továbbiakban a veszteség-jelenértékek értékeit a (4) képletnek megfelelően η_1 *és* η_2 valószínűségi változó jelöli, a két normális eloszlású valószínűségi változó közötti kapcsolat erősségét mutató korrelációs együttható $\rho(\eta_1, \eta_2)$. A következőkben a *kételemű biztosítási portfólió* létrehozása esetén megjelenő kockázatdiverzifikációs hatásokat e két valószínűségi változó alapján elemezzük.

A kockázat mérésére a modellben a kockáztatott érték (VaR), illetve a szélen mért kockáztatott érték (TailVaR) alapján kerül sor. Mindkét mutatószám alkalmas lehet a bizto-

[3] Például ha egy területen rendkívül csapadékos volt az időjárás, az adott terület lakásbiztosításai esetében egyszerre több lakás esetében is szükség lehet biztosítási szolgáltatásra.

[4] A modellben egyfajta kockázat (életbiztosítás esetén például halandósági kockázat) esetében kerül sor a különböző állománynagyságok, a biztosítási események különböző bekövetkezési valószínűségei, illetve az eltérő technikai kamatok kockázatdiverzifikációt érintő hatásainak tanulmányozására. Többféle kockázat (például a halandósági kockázaton túl a piaci kockázat) figyelembevétele jóval összetettebbé tenné az elemzési keretet, ugyanakkor a *biztosítási portfólión* belüli kockázatdiverzifikációs hatások érdekes sajátosságai ebben a modellkeretben is megfigyelhetők. A modell eredményeinek értelmezéséhez az is hozzátartozik, hogy ha a vizsgált kockázatok tekintetében a két részállomány veszteség-jelenértékei között van valamilyenfajta összefüggés, akkor ezt a modellben szereplő korrelációs együttható alapján lehet figyelembe venni (például az életbiztosításnál a kockázati biztosítások és az elérési biztosítások esetében eltérően hat a biztosító eredményességére, ha a halandóság a várható halandóságtól eltér).

[5] Az életbiztosítás esetében ez például úgy értelmezhető, hogy egy adott fajta (például kockázati vagy elérési) életbiztosításokból álló állomány esetében a két részállományban azonos nemű (például férfi), de különböző életkorú biztosítottak találhatók.

sítók tőkeszükségletének mérésére is,[6] valamint ezek a mutatószámok olyan esetben is számolhatók, amikor valamely befektetést nem értékelnek napi rendszerességgel.[7] A VaR definícióját *McNeil és szerzőtársai* [2005] (37–38. o.) alapján úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ha tekintjük a kockázatos eszközök valamely portfólióját adott Δ rögzített időtartam alatt, valamilyen $\alpha \in (0, 1)$ megbízhatósági szintet és a megfelelő veszteségeloszlás eloszlásfüggvényét $F_L(l) = P(L \leq l)$ jelöli, akkor a portfólió VaR mutatója α megbízhatósági szinten az a legkisebb l érték, amelynél annak valószínűsége, hogy az L veszteség meghaladja l-t, nem nagyobb, mint $(1 - \alpha)$:

$$\mathrm{VaR}_\alpha = \inf\left\{l \in R : P\left(L > l\right) \leq 1 - \alpha\right\} = \inf\left\{l \in R : F_L\left(l\right) \geq \alpha\right\}. \tag{5}$$

A piaci kockázat kezelésében például az időhorizont (Δ) általában 1 és 10 nap közötti, a hitelkockázat kezelésében pedig egy év (uo. 38. o.).

A VaR mutatói normális eloszlású valószínűségi változó esetében a következő képlet alapján is kiszámíthatók (uo. 39. o.):

$$\mathrm{VaR}\left(\alpha\right) = \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\alpha\right), \tag{6}$$

ahol μ a normális eloszlás várható értékét, σ a normális eloszlás szórását, $\Phi^{-1}(z)$ pedig a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverz függvényét jelentik.

A VaR egyik problémájának tekinthető, hogy nem informál azoknak a veszteségeknek a súlyosságáról, amelyek $1 - \alpha$ értéknél kisebb valószínűséggel következnek be. A szélen mért kockáztatott érték (TailVaR) mutatószáma esetén nem merül fel ez a probléma: ez a mutató a várható veszteség olyan értékére utal, ami akkor merül fel, ha a kockáztatott értéket túllépte a veszteség. A TailVaR értelmezése során érdemes utalni arra, hogy több más elnevezésű mutatószám is ehhez hasonlóan értelmezhető, ilyen például a várható veszteség *(Expected Shortfall, ES)* mutatószáma. Tekintsük L (veszteséget reprezentáló) valószínűségi változót, és tegyük fel hogy $E(|L|) < \infty$, ekkor F_L sűrűségfüggvény és α megbízhatósági szint esetében az ES várható veszteség a következő (uo. 44. o.):

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u\left(L\right)du. \tag{7}$$

Folytonos valószínűség-eloszlások esetében az ES mutatószámot is lehet úgy értelmezni, hogy ez az a várható veszteség, ami akkor merül fel, ha a kockáztatott értéket meghaladja a veszteség. Ekkor tehát (uo. 45. o.):

$$ES_\alpha = \mathrm{E}(L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha). \tag{8}$$

Az ES várható veszteséghez hasonló mutatószám például a szélen mért feltételes várható érték (*Tail Conditional Expectation, TCE* vagy *Conditional Tail Expectation, CTE*), illetve a feltételes kockáztatott érték *(Conditional VaR, CVaR)* (uo. [2005] 47. o.).

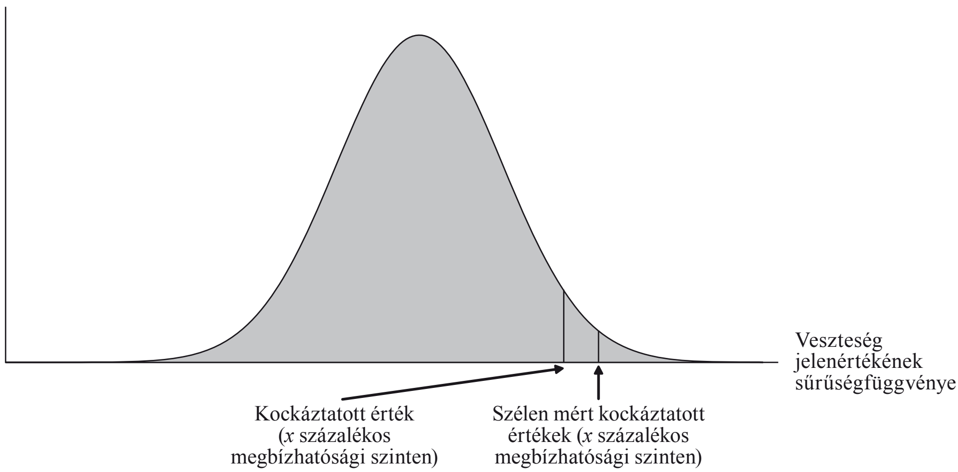
Finkelstein és szerzőtársai [2006] a szélen mért feltételes várható érték mutatóját a legnagyobb veszteségértékek átlagos költségeként határozza meg, és megállapítja, hogy ez a veszteséget reprezentáló valószínűségi változó folytonos eloszlásfüggvénye esetében megegyezik a TailVaR mutatószámmal. *Panjer* [2001] (normális eloszlással kapcsolatos elemzésében) az $\mathrm{E}(L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha)$ képletet a TailVaR mutatószám definiálására alkalmazza. Folytonos veszteség-eloszlásfüggvény esetén tehát a szélen mért kockáztatott érték (TailVaR) meghaladja a kockáztatott értéket (VaR). Ezt a jelenséget szemlélteti az *1. ábra*.

[6] Egyes felügyeleti, illetve belső vállalati modellek keretein belül (ezzel foglalkozik részletesebben például *Szüle* [2007]).

[7] E két kockázati mutatószámot a pénzügyi szektorban már évek óta alkalmazzák a kockázat számszerűsítéséhez. A kockáztatott értéket (VaR) például a J. P. Morgan alkalmazta elsők között RiskMetrics rendszerének első változatában, azóta pedig számos intézményben vált fontos kockázatmérési mutatószámmá (*McNeil és szerzőtársai* [2005] 9. o.).

1. ábra

A szélen mért kockázatott érték (TailVaR) és a kockázatott érték (VaR) összehasonlítása



A két kockázati mutatószám bizonyos matematikai tulajdonságai – szubadditivitás, monotonitás, pozitív homogenitás és átváltási invariancia *(translation invariance)* – szintén különböznek.[8] E tulajdonságok közül a szubadditivitás (ami arra utal, hogy két kockázat kombinált tőkeszükséglete nem haladja meg a két kockázatra külön számított tőkeszükséglet összegét) figyelembe veszi azt a pénzügyi elméletben elterjedt gondolatot, hogy diverzifikációval a kockázat csökkenthető. A VaR esetében nem garantált a szubadditivitás teljesülése, így a VaR nem tekinthető koherens kockázati mutatószámnak. A TailVaR mutatószám (illetve például az a szélen mért várható érték) ezzel szemben koherens kockázati mutatószámnak tekinthető (*McNeil és szerzőtársai* [2005] 243. o.).[9]

Elméleti modellünkben ugyanakkor a VaR esetében is teljesül a szubadditivitás, vagyis a VaR is koherens kockázati mutatószámnak tekinthető. Ez az itt következő – a diverzifikáció kockázatcsökkentő hatásaival kapcsolatos – levezetések alapján is belátható. Számításaink arra is rámutatnak, hogy a portfólió diverzifikálása kapcsán a Markowitz-féle modellhez hasonlóan elméleti modellünkben sem fordulhat elő, hogy a portfólió egészének kockázata a különállóan számított kockázatok összegzéseként kapott értéket meghaladja.[10]

Az előzőkben leírtaknak megfelelően jelölje a továbbiakban η_1 *és* η_2 a két biztosítási részállomány veszteség-jelenértékeit, ekkor a kapcsolatuk erősségére $\rho(\eta_1, \eta_2)$ korrelációs együttható alapján lehet következtetni. A részállományok alapján létrehozott teljes biztosítási állomány, a biztosítási portfólió veszteség-jelenértéke ekkor $\eta_1 + \eta_2$. Feltételezzük hogy η_1 és η_2 együttes eloszlása kétdimenziós normális eloszlás (ekkor az η_1 és η_2 peremeloszlások normális eloszlások, ahogyan egyébként ez az előzőkben ismertetett modellben

[8] A kockázati mutatószámokkal kapcsolatban szokás elemezni, hogy az adott mutatószám koherensnek tekinthető-e. A koherens kockázati mérőszámok tulajdonságainak leírását több tanulmány, illetve könyv is tartalmazza (például *Artzner és szerzőtársai* [1998], *Panjer* [2001], *McNeil és szerzőtársai* [2005] 238–240. o.)

[9] *Danielsson és szerzőtársai* [2005] ugyanakkor bemutatja, hogy a normális eloszlástól eltérő, „erősebb szélű” *(heavy tailed)* eloszlások esetében bizonyos (gyakorlati alkalmazások szempontjából relevánsnak tekinthető) valószínűségek esetén a VaR a széleken szubadditívnak tekinthető.

[10] Olyan értelemben, hogy a *biztosítási portfólió* esetében a tőkeszükségletként is értelmezhető kockázati mutatószámokat összeadjuk, míg a Markowitz-féle modellben a befektetési arányokkal súlyozott hozamok szórásait mint különállóan számított kockázati mutatószámokat, befektetési arányokkal súlyozva, összegzik.

szerepelt). Az η_1 és η_2 peremeloszlások rendre μ_1 és μ_2 várható értékkel és σ_1, valamint σ_2 szórással jellemezhetők, míg ezek alapján $\eta_1 + \eta_2$ eloszlás várható értéke $\mu_{pf} = \mu_1 + \mu_2$, szórása pedig $\sigma_{pf} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho(\eta_1, \eta_2)\sigma_1\sigma_2}$. Ilyen paraméterek alapján a két biztosítási részállomány esetében a VaR és a TailVaR mutató képlete (*Panjer* [2001]):

$$\text{VaR}_i = \mu_i + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_i, \quad (i = 1, 2) \tag{9}$$

$$\text{TailVaR}_i = \mu_i + \frac{f_i\left[\text{VaR}_i(\alpha)\right]}{1-\alpha}\sigma_i^2, \quad (i = 1, 2) \tag{10}$$

ahol $f_i(y)$ η_i sűrűségfüggvényét jelöli. A teljes biztosítási portfólióra számított VaR és TailVaR mutató értékei $\eta_1 + \eta_2$ valószínűségi változó $f(y)$ sűrűségfüggvénye alapján a következőképpen határozhatók meg:

$$\text{VaR}_{pf} = \mu_{pf} + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_{pf}, \tag{11}$$

$$\text{TailVaR}_{pf} = \mu_{pf} + \frac{f\left[VaR_{pf}(\alpha)\right]}{1-\alpha}\sigma_{pf}^2. \tag{12}$$

A következőkben arra a kérdésre keressük a választ, hogy a teljes biztosítási portfólió esetében számított kockázati mutatószámok (VaR és TailVaR) hogyan térnek el az egyes portfólióelemek (részállományok) esetében számított kockázati mutatószámok összegétől. Tekintsük a következőkben először a VaR kockázati mutatószám esetében a portfólióelemekhez tartozóan számított mutatószámok összegének és a teljes biztosítási portfólióra számított VaR mutatónak a különbségét (ez az érték méri a kockázat tekintetében a diverzifikációs előnyt)! Az előzőkben bemutatott paraméterek alapján tehát a diverzifikációs előny (D_{VaR}) értéke a VaR kockázati mutatószám esetében:

$$D_{\text{VaR}} = \text{VaR}_1 + \text{VaR}_2 - \text{VaR}_{pf} = \Phi^{-1}(\alpha)\left[\sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho(\eta_1, \eta_2)\sigma_1\sigma_2}\right]. \tag{13}$$

Ez a különbség $\rho(\eta_1, \eta_2)$ korrelációs együttható függvényében csökkenő (α szokásos értékei esetében), ugyanis:

$$\frac{\partial D_{\text{VaR}}\left[\rho(\eta_1, \eta_2)\right]}{\partial \rho(\eta_1, \eta_2)} = -\Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho(\eta_1, \eta_2)\sigma_1\sigma_2}} < 0. \tag{14}$$

A diverzifikációval elérhető kockázatcsökkenés mértéke a biztosítási portfólió esetében tehát minimum nulla [ha $\rho(\eta_1, \eta_2) = 1$], és maximum $2\Phi^{-1}(\alpha)\sigma_2$, [ha $\rho(\eta_1, \eta_2) = -1$]. A két biztosítási portfólióelem esetében mért kockázat értékét összegezve (VaR mutató értékeit összeadva) tehát legfeljebb akkora érték lehet az eredmény ebben a modellkeretben, mint amekkora a VaR a teljes biztosítási portfólió esetében. Ez azt is jelenti, hogy ebben a modellben a VaR is koherens kockázati mutatószámnak tekinthető.

A normális eloszlás sűrűségfüggvényének képlete alapján a diverzifikációs előny D_{TailVaR} értéke a TailVaR kockázati mutatószám esetében (a részletesebb levezetést lásd a *Függelékben*):

$$D_{\text{TailVaR}} = \frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\left[\sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho(\eta_1, \eta_2)\sigma_1\sigma_2}\right]. \tag{15}$$

A VaR kockázati mutatószámhoz hasonlóan a TailVaR esetében is függvénykapcsolat van a diverzifikációs előny és a $\rho(\eta, \eta_2)$ korrelációs együttható között, és magasabb korrelációs együttható ebben az esetben is kisebb diverzifikációs előnyt jelent:

$$\frac{\partial D_{\text{TailVaR}}\left[\rho\left(\eta_1,\eta_2\right)\right]}{\partial\rho\left(\eta_1,\eta_2\right)}=-\frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}+2\rho\sigma_1\sigma_2}}<0. \tag{16}$$

A $\rho(\eta_1, \eta_2)$ korrelációs együttható függvényében a legkisebb lehetséges diverzifikációs előny $\rho(\eta_1, \eta_2) = 1$ esetében nulla (a VaR esetéhez hasonlóan), vagyis a portfólió létrehozása következtében a TailVaR mutatószám a teljes biztosítási portfólió kockázatának esetében sem lehet nagyobb, mint a portfóliót alkotó részállományok esetében számított kockázatértékek összege. A legnagyobb diverzifikációs előny (a Markowitz-féle modell eredményeihez hasonlóan) akkor érhető el, ha $\rho(\eta_1, \eta_2) = -1$, ekkor a diverzifikációs előny értéke:

$$D_{\text{TailVaR}}\Big|_{\rho(\eta_1,\eta_2)=-1}=\frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{2\pi}}2\sigma_2. \tag{17}$$

Elméleti modellünk tehát néhány egyszerű feltevés alapján olyan elemzési keretet hoz létre, amelyben a Markowitz-féle modellhez hasonlóan nem szerepel *diverzifikációs hátrány,* vagyis a kételemű biztosítási portfólió esetében a különállóan számított kockázati mutatószámok összege maximum az egész biztosítási portfólióra számított kockázati mutatószámmal egyezik meg.[11]

Az elméleti modell a gyakorlatban (például a kockázat mérésére) alkalmazott biztosítói modellekhez képest a hasonlóságokon túl (az eredmények könnyebb áttekinthetősége érdekében) azonban számos egyszerűsítést is tartalmaz. Elméleti modellünk és a gyakorlatban (például szolvenciaszámításokban) alkalmazott modellek hasonló, illetve eltérő jellemzői a következő területeken is megmutatkoznak:[12]

– a VaR mutatószámot több biztosító belső modellje, illetve például a Szolvencia II. szabályozás is alkalmazza, a TailVaR mutatószámot pedig egyes biztosítók belső modelljein túl például egy felügyeleti szolvenciamodell – a *Swiss Solvency Test* (*SST*, svájci szolvenciateszt) – is alkalmazta kockázati mutatószámként;

– a kockázatmérés szempontjából az egyéves időtartam a Szolvencia II. szabályozásban, illetve több biztosító belső modelljében is megjelenik, ugyanakkor a biztosítási kötelezettségek egyéves tartama az elméleti modellben egyszerűsítésnek tekinthető;

– a biztosítók esetében számos tényező miatt a veszteség-jelenérték a gyakorlatban gyakran nem tekinthető normális eloszlásúnak, elméleti modellünkben a normális eloszlás feltevése áttekinthetőbbé teszi eredményeink szerkezetét (e feltevés hasonlít például a Markowitz-féle modell feltevéséhez, amely kockázati mutatószámként a hozamok szórását alkalmazza: a gyakorlatban a hozamok szórásán túl más mutatószámok is fontosak lehetnek a kockázatok mérésében, mert a normális eloszlástól gyakran eltérnek a hozameloszlások);[13]

– az elméleti modell eredményei a kockázatdiverzifikáció hatásainak feltérképezéséhez kapcsolódnak, így a biztosító számára rendelkezésre álló saját tőke értékének és a díjtartaléknak az arányát adott konstansnak feltételezi a modell (a gyakorlatban természetesen a kockázathoz mérten szükséges tőke értékét összetett számítások során lehet meghatározni, a ténylegesen rendelkezésre álló tőke azonban a kockázathoz mérten szükséges tőke értékét például meg is haladhatja).

[11] Ez hasonlít a Markowitz-féle modell azon eredményére, hogy a kételemű befektetési portfólió hozamának szórása – mint kockázati mutatószám – legfeljebb az egyes befektetési lehetőségek hozamai szórásainak – befektetési arányokkal súlyozott – átlagával egyezik meg.

[12] *Solvency Assessment Models*… [2005], *Filipovic–Rost* [2005], illetve a Szolvencia II. szabályozást leíró *Európai Parlament és a Tanács*… [2009] alapján.

[13] A gyakorlatban például kopula alkalmazása is előfordul a kockázatok „összefüggésének” mérésénél, ami a lineáris korrelációs együttható alkalmazásának problémáival is összefügg (e problémákkal például *Boyer és szerzőtársai* [1999] is foglalkozik).

Hatékony biztosítási portfóliók

Modellfeltevéseink alapján a – Markowitz-féle modell eredményeihez hasonló értelemben – hatékonynak tekinthető biztosítási portfóliók, illetve bizonyos megfontolások szerint optimálisnak tekinthető befektetési arányok meghatározásával foglalkozunk. Láttuk tehát, hogy a VaR és a TailVaR kockázati mutatószámok esetében a biztosítási portfólió egésze esetén számított kockázat legfeljebb a biztosítási részállományokra számított kockázatértékek összege, illetve egynél kisebb $\rho(\eta_1, \eta_2)$ korrelációs együttható esetén ennél kisebb érték.

A következőkben azzal foglalkozunk, hogy diverzifikált biztosítási portfólió – nem homogén biztosítási állomány – esetén találhatók-e olyan részállomány-kombinációk, amelyek hozam–kockázat kapcsolata előnyösebb más biztosítási portfólióknál. Ez a kérdés a *hatékony* biztosítási portfóliók keresésével függ össze.

A pénzügyi szakirodalomban a *hatékony portfóliók* témájával például a Markowitz-féle portfólióelmélet foglalkozik, eredményei további kutatásokat inspiráltak. Ebben az elméleti keretben központi szerepe van a különböző befektetési lehetőségek hozama és kockázata közötti kapcsolatnak (a kockázatot az egyes befektetési lehetőségek hozamának szórásával mérve). A hozamok közötti kapcsolat mérésére a (lineáris) korrelációs együttható szolgál. A Markowitz-féle elmélet egyik megállapítása: ha a befektetésre szánt összeget nem egyetlen befektetési lehetőségbe fektetik, hanem megosztják a különböző befektetési lehetőségek között, a diverzifikált portfólió kockázata a korrelációs együttható függvényében alacsonyabb is lehet, mint a portfólióban szereplő befektetési lehetőségek kockázatainak súlyozott átlaga (a súlyozás a diverzifikált portfólióba fektetett összeg megosztása szerint történik). A Markowitz-féle portfólióelmélet fontos eredményei közé tartozik, hogy a kockázat és hozam kapcsolatát elemezve léteznek olyan portfóliók, amelyek bizonyos értelemben „jobbak" más portfólióknál: adott kockázati szint esetén maximális hozamot biztosítanak; ezeket a portfóliókat *hatékonynak* lehet nevezni.

A biztosítási portfólió esetében szintén megjelenik a befektetés témája: a (biztosítási állománnyal rendelkező) biztosító működéséhez szükség van saját tőkére, amelynek esetében meghatározható, hogy az egyes részállományokhoz a teljes befektetésre szánt saját tőke mekkora részét lehet rendelni. Biztosítási portfóliós modellünkben a befektetési súlyok azt mutatják, hogy az összes saját tőke mekkora részét lehet az egyes biztosítási részállományok kialakítására fordítani.

A biztosítók működésének sajátosságai közé tartozik, hogy különféle biztosítási állományok esetében eltérő lehet a képzett díjtartalék értéke. Így elméleti modellünkben – ha a biztosítási részállományhoz rendelt saját tőke a díjtartalék adott hányadával egyezik meg – adott nagyságú saját tőke különböző nagyságú biztosítási állomány kialakítását teszi lehetővé aszerint, hogy mekkora a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége. Modellünkben kételemű biztosítási portfóliót tekintünk, s ha a biztosítási esemény bekövetkezési valószínűsége adott, akkor az összes saját tőkének a portfólióelemek (részállományok) közötti megosztása meghatározza a részállományok nagyságát (a biztosítási szerződések számát a részállományokban). A már bevezetett jelölések alapján a részállományok nagysága w_1 és w_2 ($w_2 = 1 - w_1$) befektetési súlyok esetén:

$$n_i = \frac{STw_i(1+i)}{sp_i B}. \qquad (i = 1, 2) \tag{18}$$

Adott befektetési súlyok esetében tehát meghatározható a részállományokhoz tartozó biztosítási szerződések száma, amelyből azután kiszámolható a – részállományokra jellemző – veszteség-jelenértékek melletti VaR és a TailVaR kockázati mutatószám értéke, illetve kiszámolható a veszteség-jelenérték várható értéke is (amely a hozamméréshez kapcsolódó értéknek tekinthető).

A következőkben a pénzügyi szakirodalom egyes eredményeivel (például a Markowitz-féle portfólióelmélet eredményeivel) való könnyebb összehasonlíthatóság érdekében a biztosítási részállományokra és az egész biztosítási portfólióra a VaR, TailVaR, illetve a várható veszteség-jelenértékeket az összes befektetett saját tőkével elosztva elemezzük (ilyen módon összehasonlíthatóvá válnak a különböző nagyságrendű eredmények is). A modellfeltevések alapján tehát az egész biztosítási portfólióra számolt várható veszteség-jelenérték:

$$\mu_{pf} = E(\eta_1 + \eta_2) = \frac{ST}{s(1+k)}\left\{w_1\left[1+i_1-(1+s)(1+r)\right]+w_2\left[1+i_2-(1+s)(1+r)\right]\right\}. \quad (19)$$

A biztosítási portfólió egészére a veszteség-jelenérték varianciája pedig a következőképpen határozható meg:

$$\left(\sigma_{pf}\right)^2 = \mathrm{Var}(\eta_1+\eta_2) = \frac{Bw_1ST(1+i_1)(1-p_1)}{s(1+k)^2} + \frac{Bw_2ST(1+i_2)(1-p_2)}{s(1+k)^2} +$$

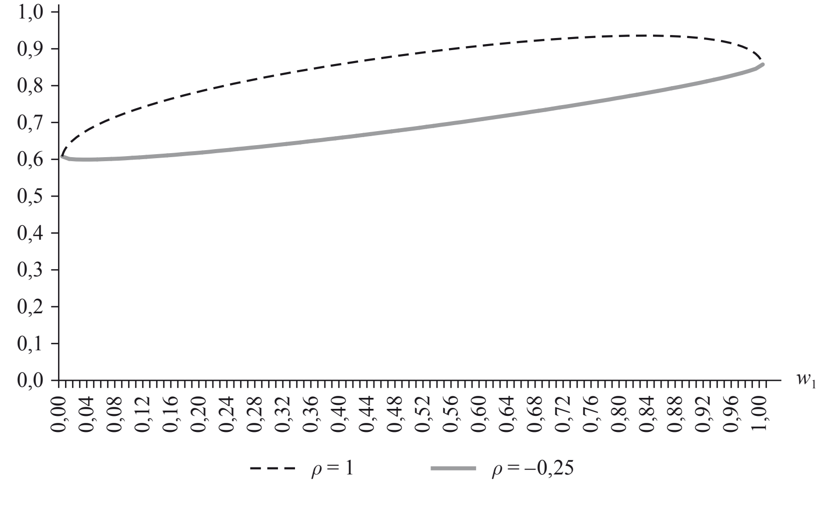
$$+2\left(\frac{B}{1+k}\right)^2 \rho(\xi_1,\xi_2)\sqrt{\frac{w_1ST(1+i_1)(1-p_1)}{Bs} + \frac{w_2ST(1+i_2)(1-p_2)}{Bs}}. \quad (20)$$

A következőkben e várható érték és variancia alapján [a (11) és (12) képlet szerint] számított VaR és TailVaR mutatót elemezzük a biztosítási portfólió esetében.

A VaR és a TailVaR mutató a modellben jellemzően nem lineárisan alakul a befektetési arányok függvényében. A két biztosítási részállományban bekövetkezett biztosítási események száma közötti korreláció figyelembevételével a szélsőérték lehet maximum vagy minimum is. Ezt a jelenséget a *2. ábra* szemlélteti a kockáztatott érték/saját tőke (VaR/ST) hányados esetében a $\rho(\xi_1, \xi_2)$ korrelációs együttható két különböző értékénél [s = 0,01; k = 0,01; r = 0,01; α = 0,9999; p_1 = 0,001; p_2 = 0,01; i_1 = 0,025; i_2 = 0,0225; a szélen mért kockáztatott érték/saját tőke (TailVaR/ST) hányados esetében hasonlók az eredmények].

2. ábra

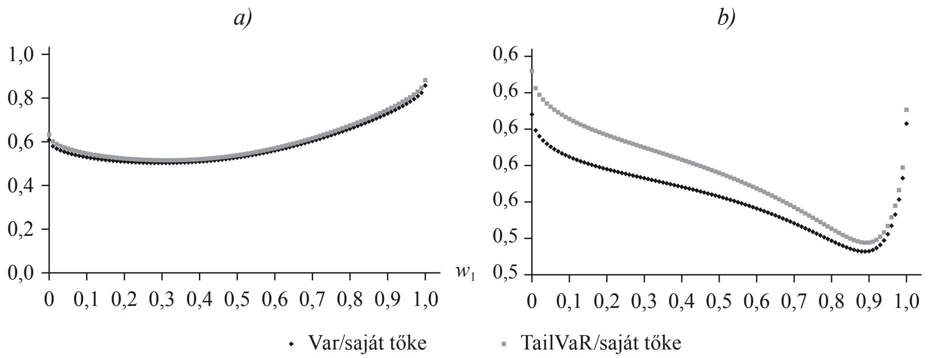
A biztosítási portfólió kockázata a korreláció függvényében (VaR)



Ha a $\rho(\xi_1, \xi_2)$ korrelációs együttható értéke maximális, a biztosítási portfólió egészére számított (ebben a modellben koherensnek tekinthető) VaR megegyezik a részállományok esetében számított VaR összegével, ami egyébként adott portfóliósúlyok esetében szélsőértékként maximális értéket ér el.[14] Ha a maximálisnál kisebb a $\rho(\xi_1, \xi_2)$ korrelációs együttható, akkor a biztosítási portfólió egészére a portfólió diverzifikálásakor ennél alacsonyabb a kockázat (a VaR, illetve a TailVaR), illetve a biztosítási portfólió diverzifikálásakor a $\rho(\xi_1, \xi_2)$ korrelációs együttható alacsony értékei esetén találhatók a kockázatot minimalizáló portfóliósúlyok.

A modellben – a definícióból is következően – a biztosítási portfólió egészére számított TailVaR mutató értéke meghaladja a VaR mutató értékét. E kétféle kockázati mutatószám közötti különbség a paraméterbeállításoktól függően különböző mértékű lehet, ahogyan ezt a *3. ábra a)* része (s = 0,01; k = 0,01; r = 0,01; α = 0,9999; ρ = –0,8; p_1 = 0,001; p_2 = 0,01; i_1 = 0,025; i_2 = 0,0225) és a *3. ábra b)* része (s = 0,01; k = 0,01; r = 0,01; α = 0,9999; ρ = –0,8; p_1 = 0,9; p_2 = 0,01; i_1 = 0,025; i_2 = 0,0225) is mutatja (a *3. ábra a)* és *b)* részén eltér a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége).

3. ábra
Kockázati mutatószámok értékei



A VaR és a TailVaR szélsőértékének helyei azonban nem feltétlenül egyeznek meg: a szélsőértékek [a *3. ábra a)* és *b)* részén a minimumértékek] gyakran különböző portfóliósúlyokhoz tartoznak. A (11) képlet alapján a biztosítási portfólió egészére a VaR esetében a következő portfóliósúlyozásnál van szélsőérték (például minimum):

$$\frac{\partial \mathrm{VaR}_{pf}\left(w_1\right)}{\partial w_1}=\frac{\partial \mu_{pf}\left(w_1\right)}{\partial w_1}+\Phi^{-1}\left(\alpha\right)\frac{\partial \sigma_{pf}\left(w_1\right)}{\partial w_1}=0. \tag{21}$$

Ezzel szemben a TailVaR kockázati mutatószám esetében a szélsőértékhez tartozó portfóliósúlyozás helye a (22) egyenlet alapján határozható meg a (12) képlet alkalmazásával:

$$\frac{\partial \mathrm{TailVaR}_{pf}\left(w_1\right)}{\partial w_1}=\frac{\partial \mu_{pf}\left(w_1\right)}{\partial w_1}+\frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{2\pi}}\frac{\partial \sigma_{pf}\left(w_1\right)}{\partial w_1}=0. \tag{22}$$

A (21) és (22) képletek alapján megállapítható, hogy a VaR és TailVaR kockázati mutatószámok esetében a szélsőértékekhez tartozó portfóliósúlyozás akkor egyezhetne meg,

[14] A szakirodalomban számos eredmény található a VaR értékével kapcsolatban összefüggő kockázatok esetén (például *Mesfioui–Quessy* [2005] a VaR korlátaival foglalkoznak a kockázatok összefüggésére vonatkozó részleges információk esetében).

ha $\frac{\partial \sigma_{pf}\left(w_1\right)}{\partial w_1}=0$ vagy $\frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{\left(1-\alpha\right)\sqrt{2\pi}}=\Phi^{-1}\left(\alpha\right)$ feltétel teljesülne, tehát a két szélsőérték egyezése a modellben nem biztos.

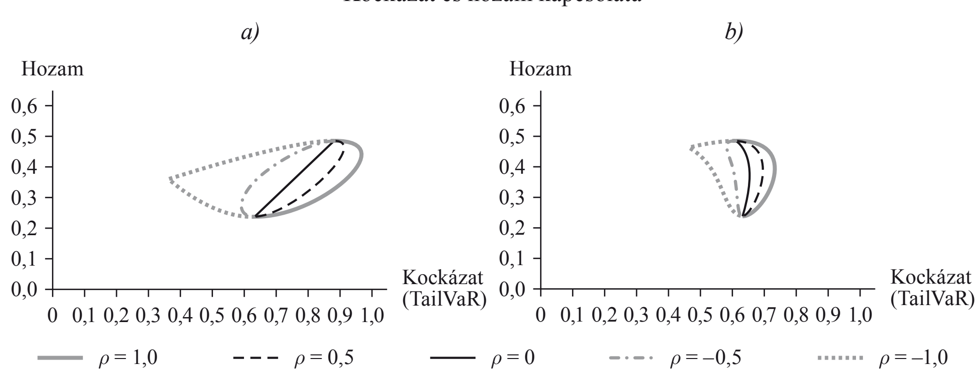
Tekintsük a következőkben a (19) szerint definiált várható veszteség-jelenérték és a biztosítási portfólió egészébe fektetett összeg (saját tőke) hányadosát mint a hozam mérésére alkalmas értéket! (Így a különböző paraméterekhez tartozó esetleges nagyságrendi különbségek sem akadályozzák az egyes eredmények összehasonlítását.) E hozammutatószám és a kockázatot mérő VaR és TailVaR mutatószámok (illetve ezeknek a saját tőke biztosítási portfólióba fektetett teljes értékével elosztott nagysága) közötti kapcsolat a diverzifikált biztosítási portfóliót jellemző hozam–kockázat összefüggésről nyújt információt. A Markowitz-féle portfólióelméletben adott portfóliósúlyokkal a két hozam közötti korrelációs együttható függvényében csökken a diverzifikált portfólió kockázata. A hozam és a (hozamok szórásával mért) kockázat közötti összefüggés a Markowitz-féle portfólióelméletben lineáris abban az esetben, amikor a korrelációs együttható minimális vagy maximális (értéke abszolút értékben egységnyi).

Biztosítási portfóliót vizsgáló modellünk fontos eredménye, hogy a hozam–kockázat összefüggés a Markowitz-féle modellhez részben hasonlóan, de bizonyos tulajdonságaiban jelentősen eltérően alakul. A VaR és a TailVaR mutatók esetében a tendenciák hasonlók, így a következőkben a TailVaR mutatóra számolt eredmények szemléltetik a diverzifikált biztosítási portfólió esetében jellemző hozam–kockázat kapcsolatot.

A Markowitz-féle portfólióelmélet eredményeihez hasonlóan a diverzifikált biztosítási portfólióra is jellemző az a tendencia, hogy ha a (két részállomány biztosítási eseményeinek száma közötti) korreláció értéke alacsonyabb, akkor azonos portfóliósúlyok esetében kisebb a kockázat (a VaR és a TailVaR mutatószám értékét a teljes befektetett összeghez – saját tőkéhez – viszonyítva). A hozam–kockázat összefüggésnél azonban a biztosítási portfólió esetében a linearitás általában nem jellemző még abban az esetben sem, amikor a korrelációs együttható értéke abszolút értékben egységnyi. A TailVaR/*ST* kockázati mutatószám esetében a hozam–kockázat kapcsolatot a *4. ábra a)* része mutatja (s = 0,01; k = 0,01; r = 0,01; α = 0,9999; p_1 = 0,001; p_2 = 0,01; i_1 = 0,025; i_2 = 0,0225). A hozam és a kockázat közötti kapcsolat esetében a korreláció többi értékénél sem garantált a linearitás, ahogyan az a *4. ábra b)* részén is látható (s = 0,01; k = 0,01; r = 0,01; α = 0,9999; p_1 = 0,9; p_2 = 0,01; i_1 = 0,025; i_2 = 0,0225).

4. ábra

Kockázat és hozam kapcsolata



A Markowitz-féle portfólióelmélethez képest a diverzifikált biztosítási portfólió esetében szintén különbség, hogy a korrelációs együttható magas értékei esetében a két részállomány külön-külön számított kockázatainál magasabb is lehet a kockázat szintje. Ez a jelenség összefügg a *2. ábrán* is látható tendenciával (magas korrelációs együttható esetében előfordulhat, hogy a diverzifikált biztosítási portfólió kockázatának szélsőértéke valamely portfóliósúlyozás esetén maximális értéket vesz fel).

A *4. ábra a) és b)* részén az előzőkben említett különbségekkel együtt is hasonlóságot mutat a Markowitz-féle modellbeli pénzügyi befektetésekre vonatkozó számolható eredményekkel. Eddig az áttekinthetőség érdekében mindössze a kételemű biztosítási portfólió esetét elemeztük, a számítások azonban az n-elemű biztosítási portfólióra is általánosíthatók. Ahogyan azt a kételemű biztosítási portfólió esetében számított eredmények is mutatják, adott kockázathoz esetenként több hozamszint is tartozhat. Mivel ebben az esetben a hozam a veszteség-jelenérték várható értékét (illetve ennek a teljes befektetett saját tőkével elosztott nagyságát) jelenti, így a több hozamszint közül nyilvánvalóan az alacsonyabb az előnyösebb. A Markowitz-féle portfólióelmélet mintájára meghatározhatók tehát a *hatékony biztosítási portfóliók* (illetve az ehhez tartozó portfóliósúlyok), amelyek esetében a kockázat adott szintjéhez a legjobb hozamszint társul. A *4. ábra a) és b)* részén ezek a *hatékony biztosítási portfóliók* a két részállomány esetében azok, amelyek – adott korrelációs együtthatót feltételezve – a hozam–kockázati görbe alsó részében helyezkednek el: ezekhez tartozik – adott kockázati szint mellett – a legjobb hozam (vagyis a legkisebb a veszteség-jelenérték várható értéke).

Optimális befektetési arányok

A portfóliók összeállításával kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy milyen az optimális portfóliósúlyozás. Az optimum megválasztása többféle szempontnak megfelelően is történhet. A kockázat minimalizálásán túl elemezhető például a *kockázatarányos hozam* is, amit a biztosítós modellünkben például a nyereség-jelenérték várható értékének a kockázati mutatószámmal (VaR, illetve TailVaR) való osztásával lehet számítani. A nyereség jelenértéke mint valószínűségi változó egyszerűen veszteség-jelenérték (mint valószínűségi változó) mínusz egyszerese a modellben [vagyis a nyereség-jelenérték $-\eta$, az η értékét a (4) képlet írja le].

A kockázatarányos hozam mutatószámait a gyakorlatban is használják, amelyek többnyire valamilyen eredményességértéknek valamely kockázati mutatószámhoz viszonyított arányaiként számolhatók ki. (A Markowitz-féle modellben az eredményesség mérésére a hozam – mint valószínűségi változó – várható értékét szokás alkalmazni.) Ahogyan azt a (4) képlet is mutatja, modellünkben a nyereség jelenértékét jelentő valószínűségi változó azt mutatja, hogy jelenértékben mekkora érték marad a biztosítónál, miután teljesítette biztosítási kötelezettségeit. Ha a biztosítási kötelezettségek pontosan a várható értéknek megfelelően alakulnak, akkor modellünkben a biztosítónak nyeresége keletkezik az itt konstansnak tekintett *befektetési* hozam[15] kapcsán. A nyereség jelenértékének várható értéke tehát a várható biztosítási kötelezettség kifizetése utáni eredményességgel függ össze.

Mivel a VaR, illetve a TailVaR mutatószámok tőkeszükségletként is értelmezhetők, ezért a *kockázatarányos hozam* ebben a modellben arra utal, hogy mennyire *hatékony* a tőkeszükséglet biztosítása a működéshez: egységnyi tőkeszükséglet mekkora

[15] E feltevést az indokolja a modellben, hogy a levezetések során ne keveredjen a *biztosítási* kockázat és a *befektetési* kockázat hatása.

nyereség-jelenértéket eredményez (adott α megbízhatósági szinten). A Markowitz-féle portfólióelmélet keretein belül valamely adott befektető számára az optimális befektetési arányok a befektető kockázati preferenciájától is függnek. Az elmélet alapján lehetséges a hatékony befektetési portfóliók meghatározása (ezek esetében a várható hozam és a kockázati mutatószám közötti összefüggés lineáris alakban is felírható, ha például kockázatmentes befektetés is van a befektetési lehetőségek között), majd a hatékony befektetési portfóliók közül a befektető a kockázati preferenciájának megfelelően választhat.

A biztosítók esetében azonban a modellünkben választott (tőkeszükségletként is értelmezhető) kockázati mutatószám értelmezéséből adódóan kiemelt jelentőségű a minimális kockázatú, illetve a maximális kockázatarányos hozamot jelentő biztosítási portfólió. Ezért a továbbiakban ezek meghatározásával foglalkozunk a kételemű biztosítási portfólió esetében.

A modellben kiszámolhatók a kockázatot minimalizáló portfóliósúlyok [a (21) és (22) képletek szerint, amennyiben a kockázati mutatószám szélső értéke minimumérték], valamint a kockázatarányos hozamot maximalizáló portfóliósúlyok. A VaR mutatószám esetében a kockázatarányos hozam maximalizálása tekintetében optimális portfóliósúlyok meghatározása a (23) alkalmazásával történhet:

$$\frac{-\dfrac{\partial \mu_{pf}(w_1)}{\partial w_1}\mathrm{VaR}_{pf}(w_1)+\mu_{pf}(w_1)\dfrac{\partial \mathrm{VaR}_{pf}(w_1)}{\partial w_1}}{\left[\mathrm{VaR}_{pf}(w_1)\right]^2}=0. \tag{23}$$

Érdemes megemlíteni, hogy a paraméterek függvényében a szélső érték lehet maximum vagy minimum is. Ez összefügg azzal, hogy bizonyos paraméterbeállítások mellett a portfóliósúlyok függvényében kiszámolt kockázati mutató szélsőértéke maximális is lehet (tehát a szélsőérték nem automatikusan minimumérték). A VaR kockázati mutatószám esetében tehát a kockázatarányos hozam szélsőértékét jelentő portfóliósúlyok alkalmazásakor (ami maximum és minimum is lehet a paraméterek függvényében) a (24) egyenlőség áll fenn:

$$\frac{\partial \mu_{pf}(w_1)}{\partial w_1}=\frac{\mu_{pf}(w_1)\dfrac{\partial \mathrm{VaR}_{pf}(w_1)}{\partial w_1}}{\mathrm{VaR}_{pf}(w_1)}. \tag{24}$$

A kétfajta optimalizálás eredményét tekintve érdekes eredmény, hogy a (maximum esetén) optimális portfóliósúlyok meghatározásához használható (24) képletben található feltétel nem egyezik meg a kockázatot (a biztosítási portfólió szintjén mért VaR értéket) minimalizáló portfóliósúlyok meghatározásához alkalmazható [(21) alapján kapott] képlettel:

$$\frac{\partial \mu_{pf}(w_1)}{\partial w_1}=-\Phi^{-1}(\alpha)\frac{\partial \sigma_{pf}(w_1)}{\partial w_1}. \tag{25}$$

A biztosítási portfólió sajátosságai következtében tehát elképzelhetők olyan esetek, amikor a *kockázatminimalizáló portfóliósúlyokat* a VaR mutatószám esetében nem a (21) képlet, illetve a *kockázatarányos hozamot maximalizáló* portfóliósúlyokat nem a (23) képlet alkalmazásával lehet kiszámolni (például amikor a paraméterek alapján a VaR esetében a szélsőérték maximum). Az eredmények ezzel együtt arra utalnak, hogy a kétféle optimalizálást eredményező portfóliósúlyok nem egyeznek meg automatikusan.

A TailVaR kockázati mutatószám alkalmazása esetén a kockázatarányos hozamot maximalizáló befektetési arányok (portfóliósúlyok) szintén nem feltétlenül egyeznek meg a

TailVaR értéket minimalizáló befektetési arányokkal. A kockázatarányos hozamot maximalizáló befektetési arányok ugyanis a (26) alkalmazásával számolhatók (amennyiben a szélsőérték maximum):

$$\frac{\partial \mu_{pf}(w_1)}{\partial w_1} = \frac{\mu_{pf}(w_1)\dfrac{\partial \mathrm{TailVaR}_{pf}(w_1)}{\partial w_1}}{\mathrm{TailVaR}_{pf}(w_1)}. \tag{26}$$

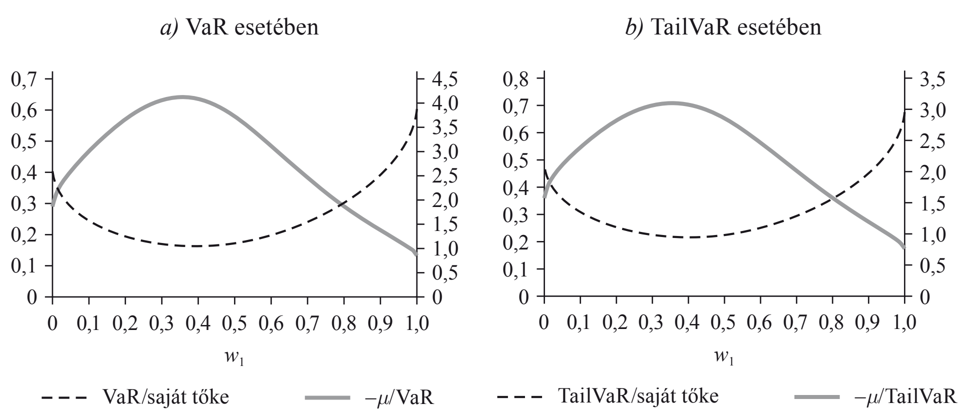
Ez a feltétel a VaR értéknél levezetett eredményekhez hasonlóan nem feltétlenül egyezik meg a kockázatminimalizáló portfóliósúlyok meghatározásához alkalmazható képlettel, amely a (22) alapján (amennyiben a paraméterbeállítások alapján e képlettel a számolható szélsőérték a minimum):

$$\frac{\partial \mu_{pf}(w_1)}{\partial w_1} = -\frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\frac{\partial \sigma_{pf}(w_1)}{\partial w_1}. \tag{27}$$

A különböző szempontok alapján meghatározható optimális befektetési arányok különbözőségét a VaR mutatószám esetében az *5. ábra a)* része, a TailVaR mutatószám esetében pedig a *b)* része szemlélteti (s = 0,01; k = 0,01; r = 0,02; α = 0,9999; ρ = –0,5; p_1 = 0,1; p_2 = 0,01; i_1 = 0,025; i_2 = 0,0225) egy olyan esetben, amikor a (21) és (22) képlet a kockázatminimalizáló, a (24) és (26) képlet pedig a kockázatarányos hozamot maximalizáló portfóliósúlyok számítására alkalmazható.

5. ábra

Optimális befektetési arányok*



*Vízszintes tengely: portfóliósúlyok, bal tengely: kockázati mutatószámok, jobb tengely: kockázatarányos hozam értékei.

Az „optimális” biztosítási portfóliók kialakítása szempontjából tehát érdekes eredmény, hogy a (tőkeszükségletként is értelmezhető) kockázat minimalizálása a kételemű biztosítási portfólió esetében nem automatikusan jelenti egyidejűleg a kockázatarányos hozam maximalizálását is. Ez az eredmény hasonlít a Markowitz-féle modellből adódó következtetésekre, ahol (kockázatmentes befektetési lehetőség hiányában) a kockázatot (a hozam szórását) minimalizáló portfóliósúlyok általában nem egyeznek meg a (várható hozam és a kockázat arányaként számolható) kockázatarányos hozam értékét maximalizáló portfóliósúlyokkal.

Következtetések

A biztosítók állományára általában jellemző a heterogenitás olyan értelemben, hogy több különböző (homogén, azaz főbb tulajdonságaikban megegyező) részállományból tevődik össze. A részállományok összessége tekinthető egyfajta *biztosítási portfóliónak,* amelyre definiálhatók a hozam és a kockázat különböző mutatószámai is.

A pénzügyi szakirodalomban a *befektetési portfóliók* összeállításával kapcsolatos elméletek egyik kiindulópontjának tekinthető Markowitz-féle portfólióelmélet keretein belül – a hozam és kockázat kapcsolata alapján különböző befektetési lehetőségek figyelembevételével – meghatározhatók a *hatékony* portfóliók, amelyeknek adott kockázati szint mellett maximális a hozamuk.

A *biztosítási portfóliók* esetében szintén lehetséges olyan portfóliók meghatározása, amelyeknél a kockázat adott szintjéhez a lehető legjobb hozamszint társul. A *hatékony* biztosítási portfóliók meghatározása során azonban a pénzügyi szakirodalomban alkalmazott hozam- és kockázatdefiníciót nem érdemes változatlan formában alkalmazni a biztosítási állományok, illetve a biztosítási portfóliók sajátosságai miatt.

Elméleti modellünkben a biztosítók fontosabb működési alapelvei alapján olyan modellkeretet alakítottunk ki, amelyben a *hozam mérése* a veszteség-jelenérték (illetve az optimális portfóliósúlyok meghatározásakor a nyereség-jelenérték) várható értékével, a *kockázat számszerűsítése* pedig a biztosítók esetében a gyakorlatban esetenként a tőkeszükséglet mérésére is alkalmazott VaR, illetve TailVaR mutatószámok alkalmazásával történik. E modellkeretet néhány egyszerű feltevés határozza meg, a kapott eredmények azonban így is összetettek, és rámutatnak a biztosítási portfóliók, valamint a befektetési portfóliók közötti érdekes különbségekre.

A kételemű biztosítási portfóliók hozam–kockázat összefüggésének elemzése során kapott eredmények alapján megállapítható, hogy a diverzifikációval elérhető kockázatcsökkenés a homogén részállományok biztosítási eseményei száma közötti korrelációs együttható függvénye. E korrelációtól függ az is, hogy a diverzifikált biztosítási portfóliók kockázata esetében – a befektetési súlyok függvényében – maximum vagy minimum mérhető. Az elméleti modell keretein belül szintén bemutatható, hogy a (VaR, illetve TailVaR alkalmazásával mért) kockázatot minimalizáló, illetve a kockázatarányos hozamot maximalizáló optimális befektetési arányok nem feltétlenül egyeznek meg. Az eredmények összességében arra utalnak, hogy a biztosítási portfóliók esetében a kockázat és hozam kapcsolata sok tekintetben hasonló a pénzügyi befektetési portfóliókat jellemző „klasszikus" (a Markowitz-féle portfólióelméletben bemutatott) kapcsolathoz, azonban a biztosítási számítások sajátosságai következtében jellegzetes különbségek is tapasztalhatók.

Hivatkozások

Artzner, P.–Delbaen, F.–Eber, J-M.–Heath, D. [1998]: Coherent Measures of Risk. http://www.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/CoherentMF.pdf.

Boyer, B. H.–Gibson, M. S.–Loretan, M. [1999]: Pitfalls in Tests for Changes in Correlations. Board of Governors of the Federal Reserve System, International Finance Discussion Papers, 597.

Solvency Assessment Models… [2005]: Solvency Assessment Models Compared. Comité Européen des Assurances (CEA), Mercer Oliver Wyman Limited, http://www.naic.org/documents/committees_smi_int_solvency_eu_II-cea.pdf.

Daníelsson, J.–Jorgensen, B. N.–Samorodnitsky, G.–Sarma, M.–de Vries, C. G. [2005]: Subadditivity Re-Examined: The Case for Value-at-Risk. Financial Markets Group, Discussion Paper, 549. London School of Economics and Political Science, London, http://eprints.lse.ac.uk/24668/1/dp549.pdf.

EURÓPAI PARLAMENT ÉS A TANÁCS… [2009]: Az Európai Parlament és a Tanács 2009/138/EK irányelve (2009. november 25.) a biztosítási és viszontbiztosítási üzleti tevékenység megkezdéséről és gyakorlásáról (Szolvencia II.) (átdolgozott változat) http://eur-lex.europa.eu/Notice.do?mode=dbl&lang=en&ihmlang=en&lng1=en,hu&lng2=hu,&val=505446:cs&page=.

FILIPOVIC, D.–ROST, D. [2005]: Benchmarking Study of Internal Models. The Chief Risk Officer Forum, http://www.vif.ac.at/filipovic/PAPERS/BMSReportfinal.pdf.

FINKELSTEIN, G.–HOSHINO, T.–INO, R.–MORGAN, E. [2006]: Economic Capital Modeling: Practical Considerations. Milliman Inc., december, http://publications.milliman.com/research/life-rr/pdfs/Economic-Capital-Modeling-Practical-Considerations-12-14-06.pdf.

MARKOWITZ, H. M. [1959/1991]: Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments. Basil Blackwell, Maiden, MA–Oxford, Egyesült Királyság, 2. kiadás.

MCNEIL, A. J.–FREY, R.–EMBRECHTS, P. [2005]: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press, Princeton.

MESFIOUI, M.–QUESSY, J. [2005]: Bounds on the Value-at-Risk for the Sum of Possibly Dependent Risks Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 37. No. 1. 135–151. o.

PANJER, H. H. [2001]: Measurement of risk, solvency requirements and allocation of capital within financial conglomerates. http://www.soa.org/research/files/pdf/measurement_risk.pdf.

SZÜLE BORBÁLA [2007]: Pénzügyi konglomerátumok szolvenciaelemzése. Budapesti Corvinus Egyetem, posztgraduális aktuárius szak, szakdolgozat.

Függelék

A két biztosítási részállomány külön számított kockázatmutatójának összege a TailVaR mutatószám esetében:

$$\mu_1+\mu_2+\frac{f_1\left[\mathrm{VaR}_1(\alpha)\right]\sigma_1^{\,2}+f_2\left[\mathrm{VaR}_2(\alpha)\right]\sigma_2^{\,2}}{1-\alpha}.$$

A biztosítási portfólió egészére a kockázat értéke a TailVaR mutatószám alkalmazása esetén:

$$\mu_1+\mu_2+\frac{f\left[\mathrm{VaR}_{pf}(\alpha)\right]\sigma_{pf}^{\,2}}{1-\alpha}.$$

E képletet a megfelelő paraméterekkel az egyes valószínűségi változók (normális eloszláshoz tartozó) sűrűségfüggvényeibe behelyettesítve, az egyes sűrűségfüggvényeket a következőképpen írhatjuk fel (a levezetés mindhárom esetben hasonló, részletesen az egyik sűrűségfüggvény esetében tekintjük át):

$$f_1\left[\mathrm{VaR}_1(\alpha)\right]=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\left\{\frac{\left[\mathrm{VaR}_1(\alpha)-\mu_1\right]^2}{2\sigma_1^{\,2}}\right\}}=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\left\{\frac{\left[\mu_1+\sigma_1\Phi^{-1}(\alpha)-\mu_1\right]^2}{2\sigma_1^{\,2}}\right\}}=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\left\{\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}\right\}}$$

$$f_2\left[\mathrm{VaR}_2(\alpha)\right]=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\left\{\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}\right\}},$$

$$f\left[VaR_{pf}(\alpha)\right]=\frac{1}{\sigma_{pf}\sqrt{2\pi}}e^{-\left\{\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}\right\}}.$$

Ezek alapján a két részállomány esetében számított TailVaR értékek összege:

$$\mu_1 + \mu_2 + \frac{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}} + \frac{\sigma_2^{\ 2}}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{1-\alpha} = \mu_1 + \mu_2 + \frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

A biztosítási portfólió esetében a TailVaR mutatószámmal mért kockázat értéke:

$$\mu_1 + \mu_2 + \frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\sigma_{pf}.$$

A diverzifikációs előny értéke tehát az előzők alapján TailVaR mutatószám alkalmazása esetén:

$$D_{\text{TailVaR}} = \frac{e^{-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2}{2}}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}\left(\sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2} + 2\rho(\eta_1, \eta_2)\sigma_1\sigma_2}\right).$$